

Тұтқыр сұйықтар механикасы

1. Ішкі үйкеліс күштері. Сұйықтардың ламинарлық және турбуленттік ағыны
2. Стокс формуласы. Пуазейль формуласы.

Идеалды сұйық, яғни үйкеліссіз сұйық, абстракция боп табылады. Барлық нақты сұйықтар мен газдарға көп не аз дәрежеде тұтқырлық немесе ішкі үйкеліс тән.

Әр түрлі жылдамдықпен бір-біріне параллелді қозғалушы сұйықтың екі көршілес қабаттарының арасындағы үйкеліс күші **Ньютонның тұтқыр үйкеліс заңы** бойынша анықталады:

$$F_{mp} = \eta \left| \frac{du}{dy} \right| S \quad (150)$$

мұнда S – сұйық қабатының ауданы, $\frac{du}{dy}$ – сұйық қабаттары арасындағы жылдамдық градиенті, η – сұйықтың динамикалық тұтқырлығы деп аталады.

Сұйықтың (немесе газдың) ағысының екі түрін бақылауға болады. Біреуінде, сұйық, бір біріне қарасты, араласпастан сырғитын қабаттарға бөлінетін сияқты. Мұндай ағыс **ламинарлы** (қабатты) деп аталады. Жылдамдық немесе ағынның көлденең мөлшері артқанда ағын сипаты елеулі түрде өзгереді. Сұйықтың лезде араласып кетуі туындайды. Мұндай ағыс **турбулентті** деп аталады.

Ағылшын оқымыстысы Рейнольдс ағыс сипатының мөлшерсіз шаманың мәніне тәуелді екендігін анықтаған:

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta} \quad (151)$$

мұнда ρ – сұйықтың (немесе газдың) тығыздығы, v – ағынның орташа жылдамдығы, η – сұйықтың тұтқырлық коэффициенті, l – сипаттық мөлшер.

Бұл шама **Рейнольдс саны** деп аталады. Рейнольдс санының аз мәндері тұсында ламинарлық ағын байқалады. Re -ң қайсібір белгілі мәнінен бастап, ол кризистік деп аталады, ағын турбуленттік сипатқа көшеді.

Стокс формуласы. Аздау Re кезінде, яғни қозғалыстың бояу жылдамдығы тұсында (және аздау l), ортаның қарсылығы іс жүзінде тек үйкеліс күштерінің негізінде ғана болады. Стокс бұл жағдайда қарсылық күші η динамикалық тұтқырлық коэффициентіне, дене қозғалысының v жылдамдығына және денеге тән l мөлшерге пропорционалды екенін анықтады: $F \sim \eta l v$. Мысалы, шар үшін, егер l орнына шардың r радиусын алар болсақ, пропорционалдық коэффициент тең болып шығады.

Ендеше:

$$F = 6\pi\eta r v \quad (152)$$

Бұл формула **Стокс формуласы** деп аталады.

Пуазейль формуласы. Сұйықтың дөңгелек құбыр ішіндегі қозғалысы кезінде жылдамдық құбыр қабырғасында нөлге тең және құбырдың өсінде максималды болады. Ағынды ламинарлы десек, құбыр өсінен r қашықтағы жылдамдық өзгерісі заңын табуға болады:

$$v(r) = v_o \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (153)$$

мұнда v_o – құбыр өсіндегі жылдамдықтың мәні, ал R – құбыр радиусы.

Көріп отырғанымыздай, ламинарлық ағыс кезінде жылдамдық құбыр өсінен қашықтығына қарай параболалық заңға сай өзгереді.

Ағысты ламинарлы деп шамалай отырып Q сұйықтың ағынын, яғни бірлік уақыттың ішінде құбырдың көлденең қимасы арқылы өтетін сұйықтың көлемін (секунттық шығын) есептеп шығаруға болады. Ағынға арналған формуланы аламыз:

$$Q = \frac{(p_1 - p_2)\pi R^4}{8\eta l} \quad (154)$$

мұнда $\frac{p_1 - p_2}{l}$ – құбырдың бірлік ұзындығындағы қысымның түсуі.

Бұл формула **Пуазейль формуласы** деп аталады. Осы формула бойынша, сұйық ағыны құбырдың бірлік ұзындығындағы қысымның түсуіне пропорционалды, құбыр радиусының төртінші дәрежесіне пропорционалды және сұйықтың тұтқырлық коэффициентіне кері пропорционалды.

Бұл формула сұйықтың тұтқырлығын анықтау үшін пайдаланылады.

Сұйықты радиусы белгілі капилляр арқылы өткізе отырып және қысымның түсуі мен Q ағының өлшей отырып η -ді табуға болады.

Студенттердің өздік жұмысы (СӨЖ)

Сұйықтар мен газдардың қасиеттері. Гидроаэростатика заңдары.
Дененің тұтқыр сұйық ішіндегі қозғалысы. Стокстың кедергі күші.
Тұрақталған қозғалыс.

Тербелістер

1. Тербелістердің жалпы сипаттамалары.
2. Гармониялық тербелістер. Гармониялық осциллятор. Тербелістердің қосылуы. Соғу.
3. Өшетін тербелістер.
4. Мәжбүрлік тербелістер.

Тербелістер деп әртүрлі қайталанушылық дәрежесімен ерекшеленетін үрдістерді атайды. Қайталанушылықтың мұндай қасиетіне мысалы, сағат маятнігінің тербелісі, шек тербелесі немесе, камертон таяқтары, радиоқабылдағыш контурындағы конденсатор орамалары арасындағы кернеу ие бола алады.

Қайталанушы үрдістің физикалық табиғатына қарай тербелістер мынадай түрлерге бөлінеді: **механикалық, электромагниттік, т.б.**

Тербелуші жүйеге тигізетін әсерінің сипатына қарай **еркін** (немесе меншікті) тербелістер, **еріксіз** тербелістер, **автотербелістер** және **параметрлік** тербелістерді кездестіреміз.

Ең қарапайымы болып **гармониялық тербелістер** саналады, яғни тербеліс кезінде тербелуші шама (мысалы маятниктің ауытқуы) уақыт өте келе синус және косинус заңымен өзгереді. Тербелістердің бұл түрі әсіресе мына себептерге байланысты аса маңызды: біріншіден, тербелістер табиғатта және техникада гармониялық түрге өте жақын сипатта болады, және, екіншіден, бөтен формадағы периодтық үрдістер (уақытқа басқаша тәуелділіктегі) бірнеше гармониялық тербелістердің қабаттасуы ретінде көрінуі мүмкін.

Гармониялық осциллятор. Дененің күш әсерімен тербелуі үрдісін сандық жағынан сипаттау үшін Ньютон механикасы заңдарын пайдалану қажет. Серіппенің серпімділік күші әсерінен тербелуші дененің (мысалы домалақ шар) қозғалысын қарастырайық ($F = -kx$). Үйкеліс күшінің қозғалысқа тигізетін әсерін есепке алмаймыз.

Шарик үшін Ньютонның екінші заңының теңдеуі мына түрде болады:

$$m\ddot{x} = -kx \tag{155}$$

мұнда x – тепе-теңдік қалпына дейінгі қашықтық, \ddot{x} – уақыт бойындағы координатаның екінші туындысы, ал k – серіппенің қатаңдығы.

(155) түріндегі теңдеу гармониялық тербелістер теңдеуі деп аталады, ал осы кіші тербелістерді іске асырушы жүйе сызықтық немесе гармониялық **осциллятор** деп аталады. Осылайша, серіппеде тербелуші дене сызықтық осциллятор моделі боп табылады.

Сызықтық осциллятордың басқадай мысалы ретінде ауытқу бұрышы жеткілікті түрде аз болатын физикалық және математикалық маятниктерді қарауға болады.

$w_0^2 = \frac{k}{m}$ белгісін енгізе отырып (155) теңдеуін былай түрлендірейік:

$$\ddot{x} + w_0^2 x = 0 \quad (156)$$

Сонымен, үйкеліс күші жоқ кезде серпімді күш әсеріндегі қозғалыс (156) дифференциалды теңдеумен сипатталады. Бұл теңдеу **гармониялық тербелістер теңдеуі** деп аталады.

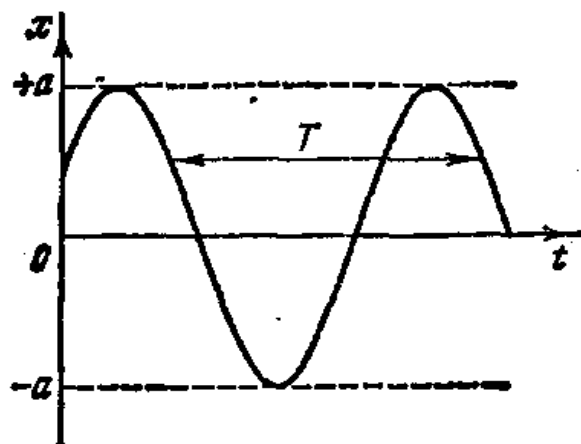
(156) теңдеуінің жалпы шешімі мынадай:

$$x = a \cos(w_0 t + \varphi) \quad (157)$$

мұнда a мен φ – еркін тұрақтылар.

Сонымен, x -ң орнынан жылжуы уақыт өте косинус заңы бойынша өзгереді. Демек, $F = -kx$ түріндегі күштің әсерінде тұрған жүйенің қозғалысы гармониялық тербеліс түрінде болады.

Гармониялық тербеліс графигі, яғни (157) функциясының графигі, оған кіруші параметрлермен бірге 14 суретте көрсетілген.



14 Сурет.

a шамасы амплитуда деп, ω_0 – гармониялық тербелістің дөңгелек немесе циклдік жиілігі, ал косинус аргументінде тұрған $\omega_0 t + \varphi$ шама – тербеліс фазасы деп аталады. φ фазаның $t=0$ болғандағы мәнін бастапқы фаза дейді. (157) көрінетіндей, x мәні $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ уақыт аралығы арқылы

қайталанады. Мұндай функция периодтық деп, ал T оның периоды деп аталады.

Бастапқы шарттар. Гармониялық тербеліс толығымен жиілікпен, амплитудамен және бастапқы фазамен сипатталады. Жиілік жүйенің физикалық қасиеттерінен тәуелді. Амплитуда мен тербелістің бастапқы фазасын анықтау үшін материялық нүктенің қандай – да бір уақыт мезетіндегі орны мен жылдамдығын білу керек. Егер тербеліс теңдеуі (157) түрінде өрнектелген болса, ал $t=0$ мезетінде координата мен жылдамдық соған сәйкес x_0 және v_0 -дерге тең болса, онда (157)-нің негізінде мынаны жаза аламыз:

$$x_0 = \alpha \cos \varphi \qquad \dot{x}_0 = v_0 = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = -\alpha \omega_0 \sin \varphi \qquad (158)$$

Осы формулалардан мынаны алуға болады

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \qquad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0} \qquad (159)$$

Жылдамдық пен үдеудің өзгерістері. Гармониялық осциллятордың энергиясы. (157)-ні уақыт бойынша дифференциалдап, жылдамдықта гармониялық заң бойынша өзгертінін көрсетуге болады. Салыстыру көрсеткендей, жылдамдық ығысуды фаза бойынша $\pi/2$ -ге алдын орап отырады.

(157) - ні уақыт бойынша екі рет дифференциалдап үдеу үшін өрнекті табуға болады. Анализ көрсететіндей, үдеу мен ығысу қарама-қарсы фазада болады.

Квазисерпімді күш консервативті болып табылады. Сондықтан гармониялық тербелістің **толық энергиясы** тұрақты болып қалуы керек. Толық энергия үшін формула:

$$E = E_{\kappa} + E_n = \frac{\kappa a^2}{2} = \frac{m a^2 \omega_0^2}{2} \quad (160)$$

Тербелістердің қосылуы. Соғулар. Бір бағыттағы екі қосылушы гармониялық тербелісті жиілігі бойынша бір бірінен аса айырмашылығы бола қоймайтын жағдайда қарастырайық. Осы үрдіс практикада ерекше қызығушылық тудырады. Мұндай жағдайда қорытқы қозғалысты амплитудасы пульсацияланатын гармониялық тербеліс ретінде қарастыруға болады. Мұндай тербелістер соғулар деп аталады.

Өшетін тербелістер. Сызықтық осциллятордың еркін тербелістері сыртқы күштер жоқ кезде өтеді. Сыртқы күш боп саналатын үйкеліс кезінде сызықтық осциллятордың тербеліс энергиясы азаяды, ал ендеше, тербеліс амплитудасы да төмендейді. Үйкеліс бар кездегі тербелістер **өшетін** бола бастайды. Үйкеліс күші жылдамдыққа қарсы әрекет етеді. Демек, сызықтық осциллятор үшін оның әсері қайта оралтушы күштің азаюына, яғни, серіппенің серпімділігіне (k шамасының азаюы)

эквивалентті.

Егер $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ болса, онда тербеліс жиілігінің азаюына байланысты периодтың ұлғаятындығын көруге болады.

Сұйық үйкеліс күшін қарастырайық. Қозғалыс теңдеуінің оң жақ бөлігіне сұйық үйкеліс күшін қосар болсақ, онда ол мына түрге енеді:

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} \quad (161)$$

мұнда β – үйкеліс коэффициенті. Бұл теңдеуді мынадай түрге енгізіп жазған ыңғайлы:

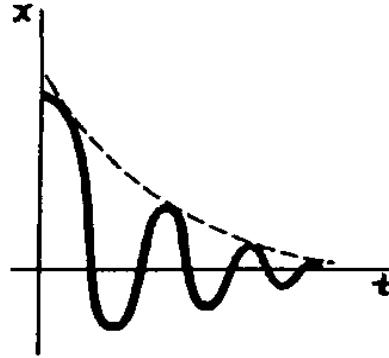
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + w_0^2x = 0 \quad (162)$$

мұнда $\gamma = \frac{\beta}{2m}$, $w_0^2 = \frac{k}{m}$. (162) өшетін тербеліс теңдеуі.

Бұл теңдеудің шешімі мына формула түрінде алынады:

$$x = a_0 e^{-\gamma t} \cos \Omega t \quad (163)$$

Бұл амплитудасы ($a = a_0 e^{-\gamma t}$) азаюшы тербеліс, ал жиілік ($\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$) тұрақты. Бұл тербелістің графигі 15 суретте берілген.



15 Сурет.

(163) формуласынан көрінетіндей, тербеліс амплитудасы $\tau = \frac{1}{\gamma}$ уақыт ішінде $e=2,7$ есе азаяды.

τ уақыт аралығы өшуші тербелістер уақыты деп, ал γ – өшу декременті деп аталады.

Тербеліс амплитудасының период ішіндегі өзгеруі сонымен қоса, $\theta = \gamma T$ шамасымен де сипатталады, ол **өшудің логарифмдік декременті** делінеді.

Мәжбірлік тербелістер. Гармониялық осцилляторға үйкеліс күшінен басқа гармониялық сыртқы күш әсер етсін

$$F = F_0 \cos \omega t, \quad (164)$$

мұндағы F_0 – күш амплитудасы, ω - күш жиілігі.

Өшетін тербеліс теңдеуінің орнына қозғалыс келесі теңдеумен сипатталады:

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + F_0 \cos \omega t. \quad (165)$$

(165) теңдеуден келесі өрнекті алуға болады:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_o^2 x = \left(\frac{F_o}{m} \right) \cos \omega t \quad (166)$$

Осы теңдеу мәжбірлік тербелістер теңдеуі деп аталады.

(166) теңдеудің шешімі

$$x = a_0 \cos (\omega t + \varphi) \quad (167)$$

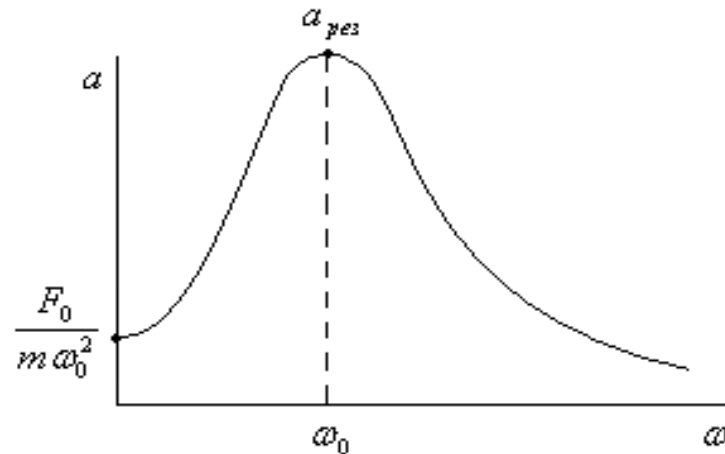
мұндағы a_0 және φ тербелістің амплитудасы және бастапқы фазасы, ал ω - сыртқы күштің жиілігі.

a_0 және φ келесі формулалардың көмегімен беріледі:

$$a_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\gamma^2 w^2}}, \quad (168)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\gamma w}{w_0^2 - w^2} = \frac{2\gamma w}{w^2 - w_0^2}, \quad (169)$$

Мәжбірлік тербелістің амплитудасының сыртқы күш жиілігінен тәуелділігінің қисығын амплитудалық - жиіліктің сипаттама деп атайды. Оның аналитикалық өрнегі (168) формуламен беріледі, ал графикалық кескіні келесі 16 суретте көрсетілген.



16 Сурет.

Амплитуда өзінің максимал мәніне w осциллятордың меншікті жиілігіне тең болғанда жетеді ($w \approx w_0$).

w_0 – резонанстық жиілік деп аталады, ал максимал амплитудамен тербелу резонанстық тербелу деп аталады. Тербелістің максимал амплитудаға дейін көтерілу құбылысы – резонанстық құбылыс.

Сапалылық. Осциллятордың басты сипаттамасының бірі, оның резонанс кезіндегі тербеліс амплитудасының статикалық тұрақты күш әсерінен ауытқуымен салыстырғандағы өсуі.

1. $w \ll w_0$. (168) формуладан келесі өрнекті аламыз

$$a_{\text{СТАТ}} = \frac{F_o}{m w_0^2} \quad (170)$$

былайша айтқанда сыртқы күштің өте аз жиілігінде ол жүйеге тұрақты статикалық күш ретінде әсер етеді.

2. $w = w_0$. Бұл резонанстық жағдай. (168) формуладан келесі өрнекке келеміз

$$a_{\text{орез}} = \frac{F_o}{m} \frac{1}{2\gamma w_0} \quad (171)$$

(170) және (171) формулалардан шығатыны

$$Q = \frac{a_{o\text{рез}}}{a_{o\text{СТАТ}}} = \frac{w_o}{2\gamma} = \frac{2\pi}{2\gamma T} = \frac{\pi}{\theta}, \quad (172)$$

мұндағы θ – өшудің логарифмдік декременті. Q – жүйенің сапалылығы деп аталады.